

**Первый тур 26.11.2025. Вторая лига.**

**1.** Четырёхугольник  $ABCD$  с наибольшей стороной  $AD$  описан вокруг окружности диаметра  $d$ . Докажите, что если  $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$ , то  $d > AB + BC + CD - AD$ .

**2.** Пусть  $n$ ,  $k$  и  $s$  — натуральные числа, причём  $s < k$ . Для каждого  $a_1, a_2, \dots, a_k \in \{1, 2, \dots, n\}$  определено вещественное число  $f(a_1, a_2, \dots, a_k)$ , причём  $f(1, 1, \dots, 1) \neq 0$ . Известно, что если зафиксировать любые  $s$  из чисел  $a_1, a_2, \dots, a_k$  и просуммировать значения  $f$  по всем  $n^{k-s}$  таким наборам, то получится 0. Найдите наименьшее возможное количество наборов  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ , для которых  $f(a_1, a_2, \dots, a_k) \neq 0$ .

**3.** Положительные числа  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  таковы, что каждое из чисел

$$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}, \quad \sqrt{\alpha+1} + \sqrt{\beta+1} + \sqrt{\gamma+1} \quad \text{и} \quad \frac{\sqrt{\alpha+1} + \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta+1} + \sqrt{\beta}} + \frac{\sqrt{\beta+1} + \sqrt{\beta}}{\sqrt{\gamma+1} + \sqrt{\gamma}} + \frac{\sqrt{\gamma+1} + \sqrt{\gamma}}{\sqrt{\alpha+1} + \sqrt{\alpha}}$$

рациональное. Докажите, что число  $\frac{\sqrt{\alpha+1} - \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta+1} - \sqrt{\beta}} + \frac{\sqrt{\beta+1} - \sqrt{\beta}}{\sqrt{\gamma+1} - \sqrt{\gamma}} + \frac{\sqrt{\gamma+1} - \sqrt{\gamma}}{\sqrt{\alpha+1} - \sqrt{\alpha}}$  также рациональное.

**4.** Граф называется  $d$ -регулярным, если степени всех вершин в нем равны  $d$ . Каких подграфов в полном графе на 2000 вершинах больше: 3-регулярных или 4-регулярных? Рассматриваются только подграфы, содержащие все 2000 вершин.

**5.** Для каких натуральных  $k \leq n$  существует унитарный многочлен  $P(x)$  степени  $n$ , имеющий  $n$  различных ненулевых вещественных корней и обладающий следующим свойством: для любого многочлена  $Q(x)$  степени  $k$  с вещественными коэффициентами, делящего  $P(x)$ , один из его коэффициентов равен 0?

**6.** Докажите, что для любого натурального  $N$  найдется такое натуральное  $n > 2$ , что любые два различных простых делителя числа  $n^3 - 1$  отличаются хотя бы на  $N$ .

**7.** Окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . На окружности  $\omega_1$  отмечена точка  $C$ . Лучи  $CA$  и  $CB$  вторично пересекают окружность  $\omega_2$  в точках  $E$  и  $F$  соответственно. Касательные к  $\omega_1$  в точках  $A$  и  $B$  пересекаются в точке  $D$ , а отрезки  $BE$  и  $AF$  — в точке  $P$  внутри треугольника  $ADB$ . Точка  $K$  такова, что  $KP \perp EF$ , точки  $K$  и  $C$  лежат с одной стороны относительно  $AB$  и длина отрезка  $KP$  равна сумме расстояний от  $P$  до прямых  $AD$  и  $BD$ . Докажите, что если прямая  $EF$  делит отрезок  $CD$  пополам, то  $KC$  касается окружности  $\omega_1$ .

**8.** Пусть  $n$  — натуральное число. Докажите, что для любого натурального  $k < 2^{n+1}$  среди любых  $2^n$  последовательных натуральных чисел можно выбрать несколько последовательных с суммой, делящейся на  $k$ .

**9.** Для положительных чисел  $a \geq b \geq c \geq d$  с суммой 2 докажите неравенство

$$ab(b+c) + bc(c+d) + cd(d+a) + da(a+b) \leq 1.$$

**10.** Напомним, что *дельтоидом* называется четырёхугольник, у которого одна из диагоналей является осью симметрии. Будем говорить, что дельтоид является *тупоугольным*, если два противоположных угла, совмещаемых этой симметрией, тупые. Верно ли, что любой выпуклый 2025-угольник можно разбить на тупоугольные дельтоиды?

**Первый тур 26.11.2025. Третья лига.**

1. Четырехугольник  $ABCD$  с наибольшей стороной  $AD$  описан вокруг окружности диаметра  $d$ . Докажите, что если  $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$ , то  $d > AB + BC + CD - AD$ .

2. Пусть  $n$ ,  $k$  и  $s$  — натуральные числа, причём  $s < k$ . Для каждого  $a_1, a_2, \dots, a_k \in \{1, 2, \dots, n\}$  определено вещественное число  $f(a_1, a_2, \dots, a_k)$ , причём  $f(1, 1, \dots, 1) \neq 0$ . Известно, что если зафиксировать любые  $s$  из чисел  $a_1, a_2, \dots, a_k$  и просуммировать значения  $f$  по всем  $n^{k-s}$  таким наборам, то получится 0. Найдите наименьшее возможное количество наборов  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ , для которых  $f(a_1, a_2, \dots, a_k) \neq 0$ .

3. Положительные числа  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  таковы, что каждое из чисел

$$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}, \quad \sqrt{\alpha+1} + \sqrt{\beta+1} + \sqrt{\gamma+1} \quad \text{и} \quad \frac{\sqrt{\alpha+1} + \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta+1} + \sqrt{\beta}} + \frac{\sqrt{\beta+1} + \sqrt{\beta}}{\sqrt{\gamma+1} + \sqrt{\gamma}} + \frac{\sqrt{\gamma+1} + \sqrt{\gamma}}{\sqrt{\alpha+1} + \sqrt{\alpha}}$$

рациональное. Докажите, что число  $\frac{\sqrt{\alpha+1} - \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta+1} - \sqrt{\beta}} + \frac{\sqrt{\beta+1} - \sqrt{\beta}}{\sqrt{\gamma+1} - \sqrt{\gamma}} + \frac{\sqrt{\gamma+1} - \sqrt{\gamma}}{\sqrt{\alpha+1} - \sqrt{\alpha}}$  также рациональное.

4. В классе несколько школьников. Известно, что для любых шести из них выполнено следующее условие: среди них найдутся двое незнакомых друг с другом, а также у любых двух незнакомых школьников будет хотя бы один общий знакомый среди оставшихся четырех ребят. Какое наибольшее количество учеников может быть в классе?

5. Игорь и Саша играют в игру. Сначала Саша называет четыре числа  $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ , затем Игорь называет еще три различных ненулевых числа  $a_1$ ,  $a_2$  и  $a_3$ . Затем для каждого  $i = 1, 2, 3$  на координатной плоскости рисуется график квадратного трехчлена  $f_i(x)$  с корнями  $x_i$ ,  $x_{i+1}$  и старшим коэффициентом  $a_i$ . Игорь выигрывает, если в каждой из двух пар  $(f_1(x), f_2(x))$  и  $(f_2(x), f_3(x))$  их графики пересекаются ровно в одной точке. В противном случае выигрывает Саша. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

6. Докажите, что для любого натурального  $N$  найдется натуральное  $n > 3$  такое, любые два различных простых делителя числа  $n^2 - 1$  отличаются хотя бы на  $N$ .

7. В неравностороннем остроугольном треугольнике  $ABC$  через ортоцентр  $H$  проведена прямая, перпендикулярная биссектрисе угла  $A$ , пересекающая стороны  $AB$  и  $AC$  в точках  $D$  и  $E$  соответственно. Пусть  $X$  — вторая точка пересечения описанных окружностей треугольников  $BDH$  и  $HEC$ . Докажите, что описанная окружность треугольника  $AHX$  касается биссектрисы угла  $BAC$ .

8. Пусть  $n$  — натуральное число. Докажите, что для любого натурального  $k < 2^{n+1}$  среди любых  $2^n$  последовательных натуральных чисел можно выбрать несколько последовательных с суммой, делящейся на  $k$ .

9. Для положительных чисел  $a \geq b \geq c \geq d$  с суммой 2 докажите неравенство

$$ab(b+c) + bc(c+d) + cd(d+a) + da(a+b) \leq 1.$$

10. Напомним, что *дельтоидом* называется четырехугольник, у которого одна из диагоналей является осью симметрии. Будем говорить, что дельтоид является *тупоугольным*, если два противоположных угла, совмещаемых этой симметрией, тупые. Верно ли, что любой выпуклый 2025-угольник можно разбить на тупоугольные дельтоиды?